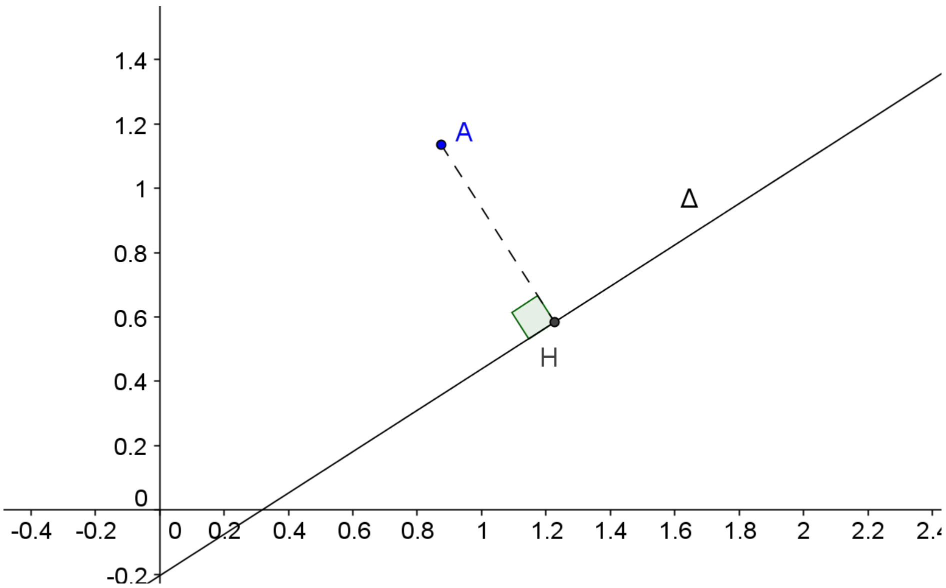
Exercices sur le produit scalaire, équations de droite et de cercles

Exercice 1 : Distance d'un point à une droite.

On se donne une droite (Δ) dont l'équation cartésienne est de la forme ax + by + c = 0 et un point $A(x_A; y_B)$.

Déterminer la distance de A à la droite (Δ).



$d(A, \Delta) = AH$

1) Application

On donne les points $A\left(-\frac{3}{2};-1\right)$; B(-1;3) et C(5;1)

a) Déterminer une équation de la droite (BC)

b) En déduire la distance du point A à la droite (BC).

c) Autre méthode :

On appelle H la projection orthogonale de A sur la droite (BC).

Déterminer un vecteur $\vec{n}$ normal à la droite (BC).

Calculer $\overrightarrow{AB}.\vec{n}$ de deux manières différentes et en déduire la longueur AH.

Exercice 2 : équations cartésiennes de cercle et de droite

1) Déterminer une équation du cercle (c) de centre A(2 ;3) et passant par le point B(1 ;4).

2) Déterminer une équation cartésienne de la tangente (T) au cercle (c) passant par le point B.

3) Déterminer les coordonnées du point C, intersection de (T) avec l'axe des abscisses.

Exercice 3 : Ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM}.\vec{u} = k$.

On considère les points A(3 ;2) et B(-1 ;0).

1) Déterminer et construire l'ensemble $\mathcal{D}$ des points M(x ;y), tels que $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AB} = 0$.

1) Déterminer une équation cartésienne et construire l'ensemble Δ des points M, tels que $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AB} = 5$.

2) Pourquoi $\mathcal{D}$ et Δ sont-elles parallèles ?

3) Soit k un réel donné.

Déterminer la nature de l'ensemble $\mathcal{D}_k$ des points M du plan vérifiant $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AB} = k$.

Exercice 4 : Relations d'Al-Kashi et formule des sinus

Soit ABC un triangle. On utilise les notations du théorème d'Al-Kashi.

1) Démontrer que l'aire S de ABC peut s'écrire :

$$S = \frac{1}{2}\times bc\times \sin \widehat{A}$$

2) Déterminer deux autres relations analogues à celle du 1) et établir la « formule des sinus » :

$$\frac{a}{\sin \widehat{A}} = \frac{b}{\sin \widehat{B}} = \frac{c}{\sin \widehat{C}} = \frac{abc}{2S}$$

3) Applications

a) On donne BC = a = 6, $\widehat{B}$ = 45° et $\widehat{C}$ = 75°.

Déterminer la valeur exacte de b, puis celle de c, en utilisant $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \times \cos \widehat{A}$.

b) On donne c = 10,5, b = 12 et $\widehat{C}$ = 60°.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation d'inconnue a :

$$C^2 = a^2 + b^2 - 2ab \times \cos \widehat{C}.$$

Combien de triangles obtient-on ?

Les triangles obtenus sont-ils isométriques ?

CORRECTION

Exercice 1 : Distance d'un point à une droite.

Un vecteur normal à Δ a pour coordonnées $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$.

Les vecteurs $\overrightarrow{AH}$ et $\vec{n}$ sont colinéaires.

Donc il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{AH} = k\,\vec{n}$.

On a alors : $AH^2 = k^2(a^2 + b^2)$.

Le point $H(x_H; y_H)$ appartient à Δ; donc $ax_H + by + c = 0$

D'autre part, $\overrightarrow{AH}\begin{pmatrix}x_H - x_A\\y_H - y_A\end{pmatrix}$.

On a donc $\overrightarrow{AH} = k\,\vec{n} \Rightarrow \begin{cases} x_H - x_A = ka \\ y_H - y_A = kb \end{cases}$

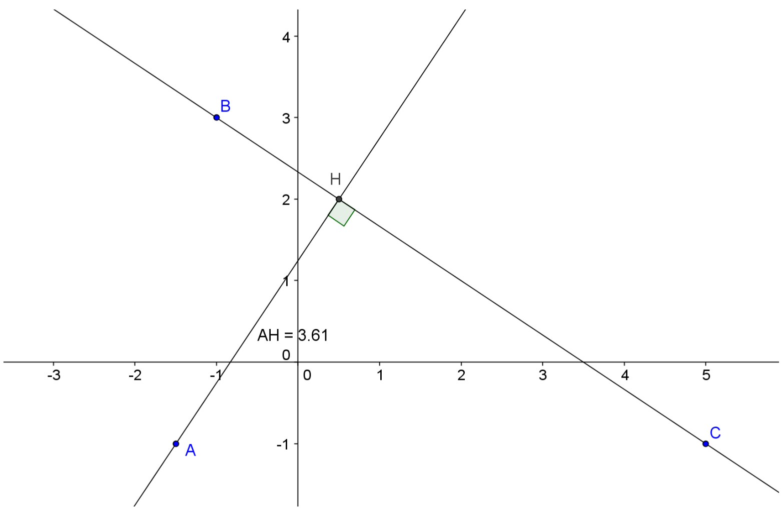
D'où : $a(x_H - x_A) + b(y_H - y_A) = ka^2 + kb^2 = k(a^2 + b^2)$

D'où : $k = \dfrac{a(x_H - x_A) + b(y_H - y_A)}{a^2 + b^2} = \dfrac{ax_H + by_H - ax_A - by_A}{a^2 + b^2} = \dfrac{-c - ax_A - by_A}{a^2 + b^2}$

Finalement : $AH = |k|\sqrt{a^2 + b^2} = |ax_A + by_A + c| \times \dfrac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a^2 + b^2} = \dfrac{|ax_A + by_A + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

Donc $\boxed{d(A, \Delta) = \dfrac{|ax_A + by_A + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}}$

2) **Application**



CORRECTION

a) Une équation réduite de la droite (BC) est :

$$y = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B}(x - x_B) + y_B$$

Soit $y = -\frac{4}{6}(x + 1) + 3$

Soit : $y = -\frac{2}{3}(x + 1) + 3$

Ou encore : $3y = -2x - 2 + 9$

Soit : $2x + 3y - 7 = 0$: équation cartésienne de la droite (BC).

b) On a donc $d(A, (BC)) = \frac{|2\times(-1,5) + 3\times(-1) -7|}{\sqrt{2^2 + 3^2}} = \frac{13}{\sqrt{13}} = \sqrt{13} \approx 3,61$

c) **<u>Autre méthode</u>**

$\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} 6 \\ -4 \end{pmatrix}$

Donc $\vec{n}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à la droite (BC) car $\overrightarrow{BC}.\vec{n} = 0$

$\overrightarrow{AB}.\vec{n} = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 4 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 0,5\times 2 + 4\times 3 = 13$

$\overrightarrow{AB}.\vec{n} = (\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HB}).\vec{n} = \overrightarrow{AH}.\vec{n} + \overrightarrow{HB}.\vec{n} = \overrightarrow{AH}.\vec{n}$ (car $\overrightarrow{HB} \perp \vec{n}$).

Or $\overrightarrow{AH}$ et $\vec{n}$ sont colinéaires et de même sens puisque $\overrightarrow{AB}.\vec{n} > 0$.

Donc $\overrightarrow{AH}.\vec{n} = AH\times||\vec{n}\,||$

D'où : $13 = AH\times\sqrt{2^2 + 3^2} = AH\times\sqrt{13}$

On retrouve $AH = d(A,(BC)) = \sqrt{13}$

CORRECTION

Exercice 2

1) $AB^2 = (2 - 1)^2 + (4 - 3)^2 = 2$

Une équation du cercle (x) est donc $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 2$

2) Un vecteur normal à la droite recherchée est le vecteur $\vec{n} = \overrightarrow{AB}$.

Soit $\vec{n}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$

Une équation de la droite cherchée (T) est donc de la forme :

$-x + y + c = 0$

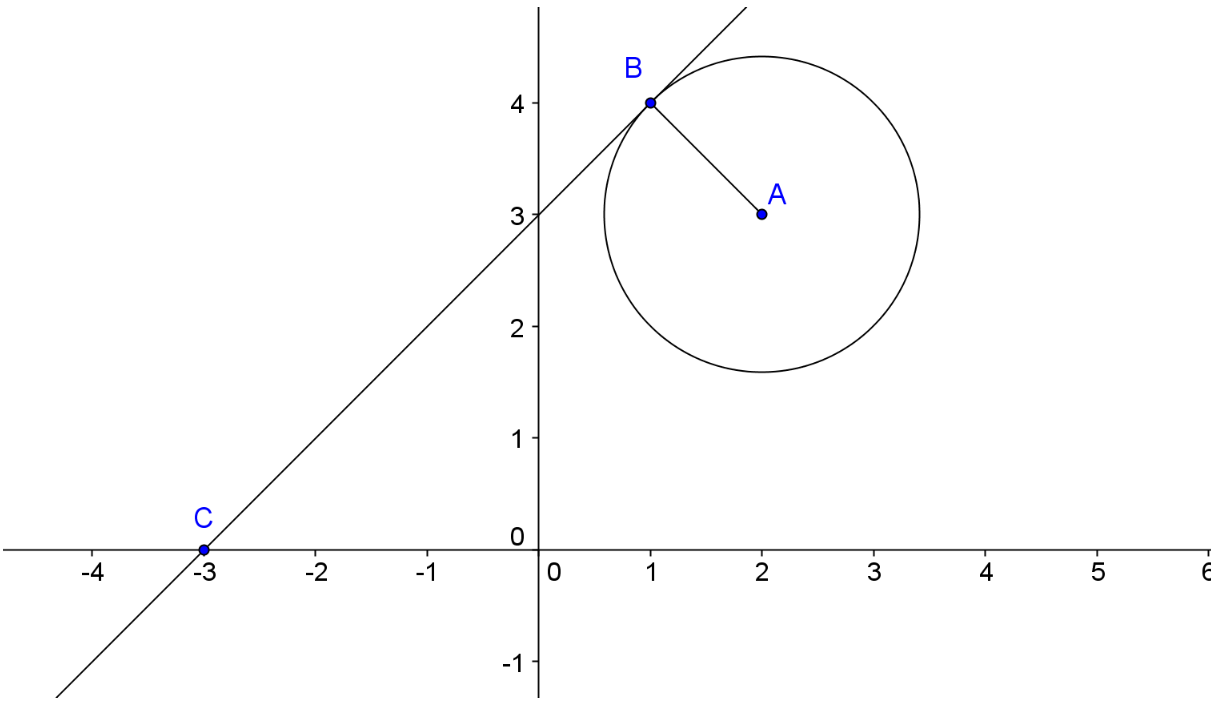
$B \in (T) \Rightarrow -1 + 4 + c = 0$

Donc $c = -3$

Une équation cartésienne de (T) est donc $-x + y - 3 = 0$

3) Pour $y = 0$, on a $x = -3$

$C(-3\ ;0)$



CORRECTION

Exercice 3 : Ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{u} = k$.

1) $M(x\,;y) \in \mathcal{D} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AB} = 0$

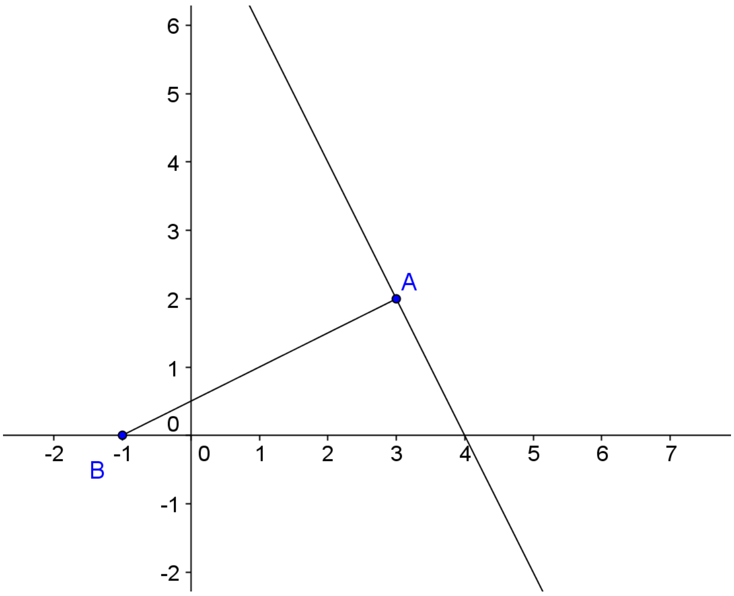
$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x-3 \\ y-2 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} -1-3 \\ 0-2 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow -4(x-3) - 2(y-2) = 0$$

$$\Leftrightarrow -4x + 12 - 2y + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x + y - 8 = 0$$

Il s'agit d'une droite d'équation $2x + y - 8 = 0$.



$\mathcal{D}$ est la droite passant par A et perpendiculaire à (AB).

2) $M(x\,;y) \in \Delta \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AB} = 5$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x-3 \\ y-2 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} -1-3 \\ 0-2 \end{pmatrix} = 5$$

$$\Leftrightarrow -4(x-3) - 2(y-2) = 5$$

$$\Leftrightarrow -4x + 12 - 2y + 4 = 5$$

$$\Leftrightarrow 4x + 2y - 11 = 0$$

Δ est la droite d'équation $4x + 2y - 11 = 0$.

D et Δ sont parallèles car elles sont toutes les deux perpendiculaires à (AB) (leurs vecteurs directeurs sont colinéaires.)

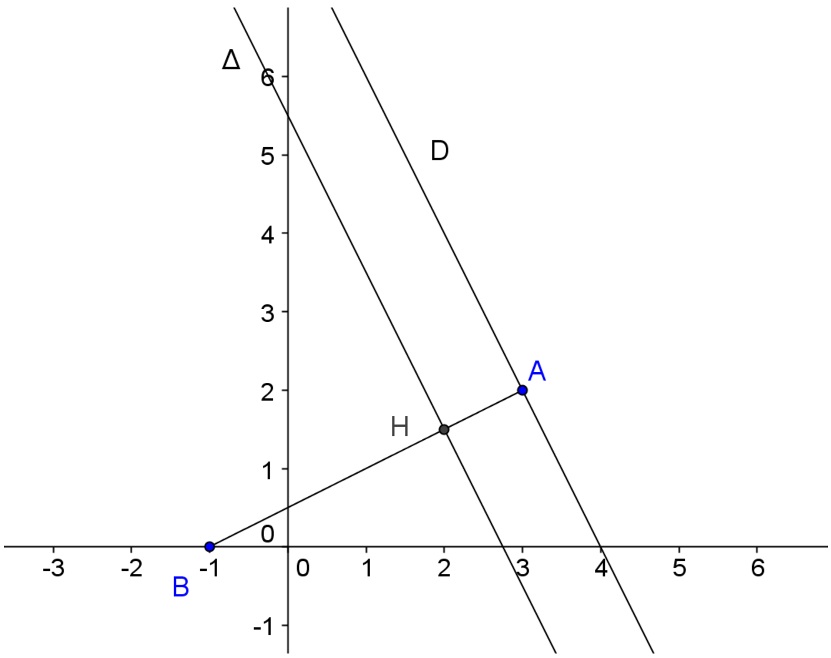
Soit H le point d'intersection de Δ avec (AB).

$\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires ; donc $\overrightarrow{AH} = k\,\overrightarrow{AB}$ avec $k \in \mathbb{R}$

On a $\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{AB} = 5 \Rightarrow k\,\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AB} = 5 \Rightarrow k = \frac{5}{AB^2} = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$

D'où : $\begin{pmatrix} x_H - 3 \\ y_H - 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -4 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow x_H = 3 - 1 = 2$ et $y_H = 2 - 0{,}5 = 1{,}5$

Donc Δ est la droite perpendiculaire à (AB) passant par le point H de coordonnées (2;1,5)



3) $M(x\,;y) \in \Delta_k \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AB} = k$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x - 3 \\ y - 2 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} -1 - 3 \\ 0 - 2 \end{pmatrix} = k$

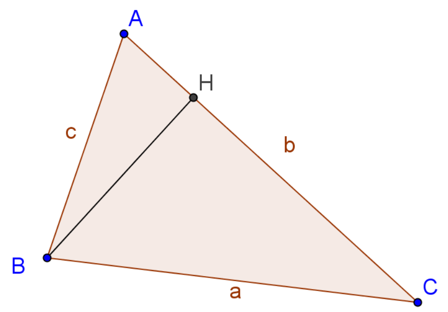
$\Leftrightarrow -4(x - 3) - 2(y - 2) = k$

$\Leftrightarrow -4x + 12 - 2y + 4 = k$

$\Leftrightarrow 4x + 2y - 16 + k = 0$

Δ_k est la droite d'équation $4x + 2y - 16 + k = 0$.

Exercice 4 : Relations d'Al-Kashi et formule des sinus



1) Soit H le pied de la hauteur issue de B.

Dans le triangle ABH rectangle en H, on a : $\sin \widehat{A} = \frac{BH}{AB} = \frac{BH}{c}$

D'où $S = \frac{AC \times BH}{2} = \frac{1}{2} \times b \times c \times \sin A$

2) Avec les pieds des deux autres hauteurs, on obtient :

$S = \frac{1}{2} ac \times \sin \widehat{B} = \frac{1}{2} ab \times \sin \widehat{C}$

D'où : $2S = bc \times \sin \widehat{A} = ac \times \sin \widehat{B} = ab \times \sin \widehat{C}$

En divisant par abc chaque membre, on obtient :

$$\frac{\sin \widehat{A}}{a} = \frac{\sin \widehat{B}}{b} = \frac{\sin \widehat{C}}{c} = \frac{2S}{abc}$$

D'où la formule cherchée, en prenant les inverses :

$$\frac{a}{\sin \widehat{A}} = \frac{b}{\sin \widehat{B}} = \frac{c}{\sin \widehat{C}} = \frac{abc}{2S}$$

CORRECTION

3) a) On a $\widehat{A} = 180 - \widehat{B} - \widehat{C} = 180 - 45 - 75 = 60$

D'après la formule des sinus, on obtient :

$$\frac{6}{\sin 60°} = \frac{b}{\sin 45°}$$

Soit $b = 6\times\frac{\sin 45°}{\sin 60°} = 6\times\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{2}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{6}$

Avec la formule d'Al-Kashi, on obtient :

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\times\cos\widehat{A}$.

$36 = 4\times6 + c^2 -2\times\times2\times\sqrt{6}\times c\times\cos 60°$

Soit : $c^2 - 2\sqrt{6}c - 12 = 0$

Équation du second degré qui a une seule solution positive : $c = \sqrt{6} + 3\sqrt{2}$

b) L'équation s'écrit : $10{,}5^2 = a^2 + 12^2 - a\times12$

Soit $a^2 - 12a + 33{,}75 = 0$

Les deux solutions de cette équation du second degré sont 4,5 et 4,5.

Ce qui donne deux triangles non isométriques :

- $a = 7{,}5$ $b = 12$ $c = 10{,}5$

  $\widehat{A} \approx 38{,}2°$; $\widehat{B} \approx 81{,}8$ ° ; $\widehat{C} = \widehat{60}$ °

- $a = 4{,}5$ $b = 12$ $c = 10{,}5$

  $\widehat{A} \approx 21{,}8$; $\widehat{B} \approx 98{,}2$; $\widehat{C} = \widehat{60}$ °